Dr. Hashem Alkhaldi

Chapter Eight

Ordinary Differential Equations

First-Order Ordinary Differential Equations

Single-Step Methods:
- Euler's Method
- Runge-Kutta Second Order Method
- Runge-Kutta Fourth Order Method

د. هاشم الخالدي

Multi-Step Methods:
- Midpoint Method
- Milne's Method
- Adams-Bashforth Second Order Method
- Adams-Bashforth Fourth Order Method

System of 1^{st}-Order Differential Equations:
- Using Single-Step Methods
- Using Multi-Step Methods

High-Order Ordinary Differential Equations

- Transformation to First Order D.E.'s
- Solution Using Single or Multi-Step Methods

Dr. Hashem Alkhaldi

هاشم الخالدي
مسة ميكانيكية

(Euler's Method)

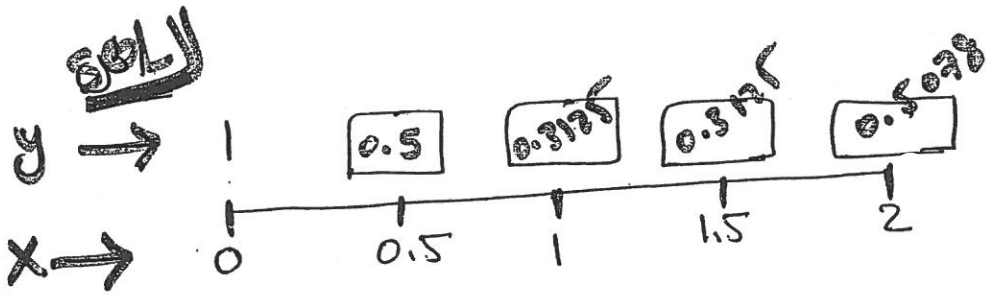
$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$ Euler law

Example Use Euler Method to solve the following D.E. at $x = 2$ using $(h = 0.5)$

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y \quad , \quad y(0) = 1$$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~



$$f(x,y) = yx^2 - y$$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Dr. Hashem Alkhaldi

First iteration (i=0) →

$$y_1 = y_0 + 0.5\, f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 1 + 0.5\, f(0,1)$$

$$y_1 = 1 + 0.5(-1) = 0.5$$

Second iteration (i=1) →

$$y_2 = y_1 + 0.5\, f(x_1, y_1)$$

$$y_2 = 0.5 + 0.5\, f(0.5, 0.5)$$

$$y_2 = 0.5 + 0.5(-0.375)$$

$$y_2 = 0.3125$$

د. هاشم الخالدي

Third iteration (i=2) →

$$y_3 = y_2 + 0.5\, f(x_2, y_2)$$

$$y_3 = 0.3125 + 0.5\, f(1, 0.3125)$$

$$y_3 = 0.3125 + 0.5(0) = 0.3125$$

Fourth iteration (i=3) →

$$y_4 = y_3 + 0.5\, f(x_3, y_3)$$

$$y_4 = 0.3125 + 0.5\, f(1.5, 0.3125)$$

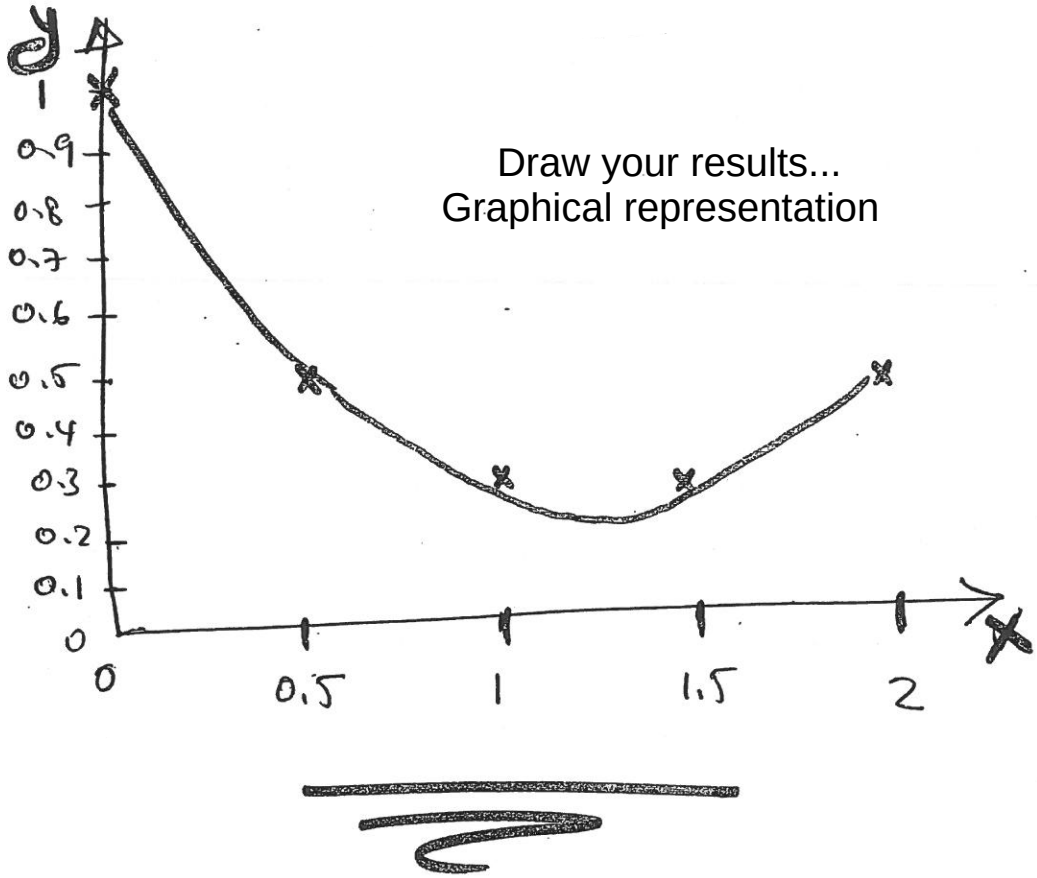
$$y_4 = 0.3125 + 0.5\,[0.3906]$$

Final answer y(2)

$$y_4 = 0.5078$$

$$y(2) = 0.5078$$

Draw your results...
Graphical representation

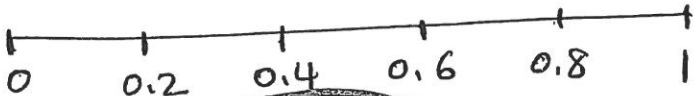


Dr. Hashem Alkhaldi

ex) $\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$, $y(0) = 2$

Find @ $x = 1$

$f(x,y) = 1 - y$



$h = 0.2$

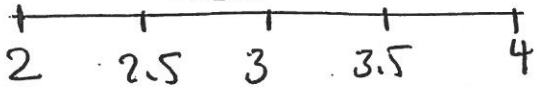
****

ex) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$, $y(2) = 5$

Find @ $x = 4$

$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2}$

$h = 0.5$



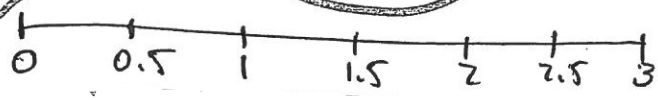
****

ex) $x + yy' - 2x^3 - 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$

Find @ $x = 3$

$f(x,y) = \frac{2x^3 + 2xy^2 - x}{y}$

$h = 0.5$



د. هاشم الخالدي

****

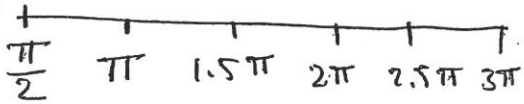
ex) $3y'^2 - 2xy\sin x = 4yy'^2$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$[3 - 4y]y'^2 = 2xy\sin x$

$y' = f(x,y) = \sqrt{\frac{2xy\sin x}{3-4y}}$

Find @ $x = 3\pi$

$h = 0.5\pi$



Dr. Hashem Alkhaldi

EX: Solve the following problem with initial value $y(0)=1$ from $(t=0)$ to $(t=2)$ and display your results &

هاشم الخالدي
دبسة ميكانيكية

(1) Analytically

(2) Nummenically (Euler Method) → $h=0.5$, $h=0.25$

(3) Find the error of the last stage

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y \quad , \quad y(0)=1$$

Sol:

(1)

$$\frac{dy}{dt} = y(t^3-1.5)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (t^3-1.5)\,dt$$

$$\ln y = \frac{t^4}{4} - 1.5t + C$$

$y(0)=1 \Rightarrow \ln(1) = 0 - 0 + C = 0 \rightarrow C=0$

Dr. Hashem Alkhaldi

→ $y = \frac{t^4}{4} - 1.5t$

$f(t,y) = yt^3 - 1.5y$

---

② $h = 0.5$ → $y \rightarrow$ 1 ● ● ● ●

$t \rightarrow$ 0 0.5 1 1.5 2

(i=0) $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$

$y_1 = 1 + 0.5 f(0,1)$

$y_1 = 0.25$

(i=1) $y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1) = 0.078$

(i=2) $y_3 = y_2 + h f(t_2, y_2) = 0.058$

(i=3) $y_4 = y_3 + h f(t_3, y_3) = 0.1135$

---

③ Error :

Estimated → $y(2) = 0.1135$

True → $y(2) = 2.718$

Dr. Hashem Alkhaldi

True value :-

$$\ln y = \frac{t^4}{4} - 1.5t$$

$$\ln y = \frac{(2)^4}{4} - 1.5(2)$$

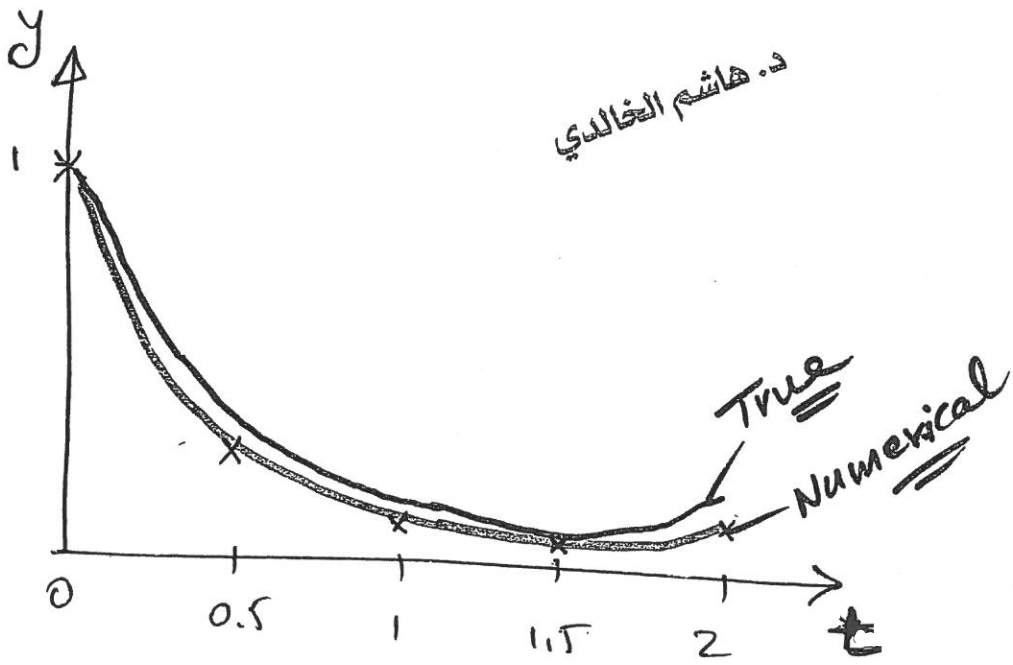
$$\ln y = 1 \rightarrow y = e^1 = 2.718$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2.718} \quad \text{True value}$$

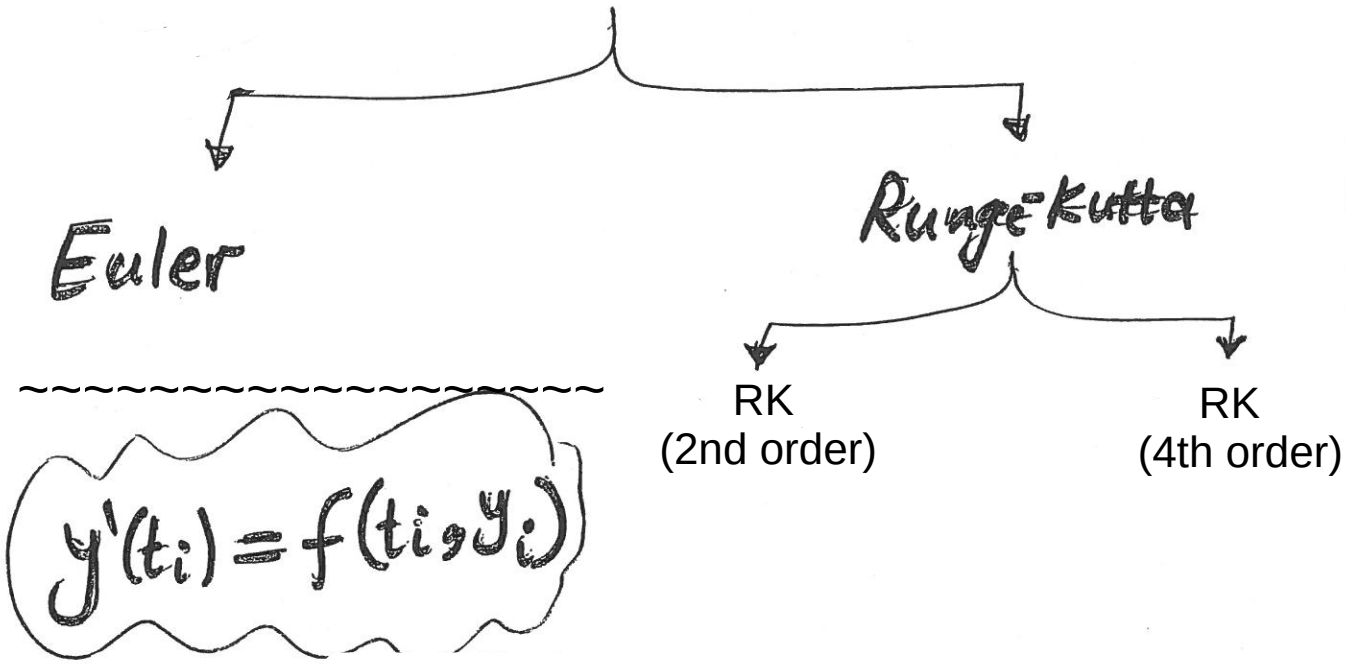
$$\text{Error} = \frac{|0.1135 - 2.718|}{2.718} * 100\%$$

* Error = 95.8 %

* Draw:



Numerical Solution/ Differential Equations (ODE)



****

Euler :

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$$

****

EX: Use Euler Method to find $y(0.5)$ to

for $y' = t + y$, $y(0) = 1$ (y_0), $h = 0.1$

Sol:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

$$\rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + 0.1(t_i + y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 t_i + 0.1 y_i$$

$$y_{i+1} = 1.1 y_i + 0.1 t_i$$

i	t_i	y_i
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.22
3	0.3	1.362
4	0.4	1.5282
5	0.5	1.72102

$y(0.5) = 1.72102$

Ex: Use Euler Method to solve $y(2.9)$?

for $y' = \sqrt{t+1}^7 + 3y$ $\quad y(2) = -4$, $h = 0.15$

Sol:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.15\left[\sqrt{t_{i+1}} + 3y_i\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.15\sqrt{t_{i+1}} + 0.45\, y_i$$

$$y_{i+1} = 1.45\, y_i + 0.15\sqrt{t_{i+1}}$$

i	t_i	y_i
0	2	-4
1	2.15	-5.5402
2	2.3	-7.7671
3	2.45	-10.9899
4	2.6	-15.6565
5	2.75	-22.4174
6	2.9	-32.2147

$y(2.9) \approx -32.2147$

Dr. Hashem Alkhaldi

Ex: Use Euler Method to Solve :

$y(1.49)$?

for $2\sqrt{xy}\,y' = 1 - y^2$ $\quad y(1)=1.5$, $h=0.07$

Sol:

$$y' = \frac{1-y^2}{2\sqrt{xy}}$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.07\left[\frac{1-y_i^2}{2\sqrt{x_i y_i}}\right]$$

i	x_i	y_i
0	1	1.5
1	1.07	1.4643
2	1.14	1.4323
3	1.21	1.4035
4	1.28	1.3775
5	1.35	1.3538
6	1.42	1.3322
~~7~~	1.49	1.3124

هاشم الخالدي
هندسة ميكانيكية

$y(1.49) \approx 1.3124$

Runge-Kutta 2nd-Order

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

where:

$$K_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f(t_{i+h}, y_i + K_1)$$

EX: using "Runge-Kutta" (2nd) Second order to find $y(0.5)$ for :-

$$y' = t + y \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

Sol:

$$K_1 = 0.1\,(t_i + y_i)$$

$$K_2 = 0.1\,(t_i + 0.1 + y_i + K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

i	t_i	y_i	K_1	K_2
0	0	1	0.1	0.12
1	0.1	1.11	0.121	0.1431
2	0.2	1.2421	0.1442	0.1686
3	0.3	1.3985	0.1699	0.1968
4	0.4	1.5819	0.1982	0.228
5	0.5	1.795		

$\therefore y(0.5) = 1.795$

Dr. Hashem Alkhaldi

EX: Using "Ruge Kutta 2nd order" to find $y(0.22)$? $y(0.1)=0.5$

$$x^2(1+3y') = \sqrt{y} \qquad h = 0.04$$

Sol:

$$\rightarrow 1+3y' = \frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

$$\rightarrow 3y' = \frac{\sqrt{y}}{x^2} - 1$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{y}}{x^2} - 1\right]$$

$$\rightarrow y' = \frac{\sqrt{y}}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

هاشم الخالدي
هندسة ميكانيكية

* $K_1 = 0.04\left(\frac{\sqrt{y_i}}{3x_i^2} - \frac{1}{3}\right)$

* $K_2 = 0.04\left[\frac{\sqrt{y_i + K_1}}{3(x_i + 0.04)^2} - \frac{1}{3}\right]$

* $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

Dr. Hashem Alkhaldi

i	x_i	y_i	k_1	k_2
0	0.1	0.5	0.9295	0.800
1	0.14	1.3648	0.7814	0.5895
2	0.18	2.0503	0.5759	0.4331
3	0.22	2.5548		

$$y(0.22) = 2.5548$$

EX: Using Runge-Kutta 2nd-Order:

Solve $(1+y)^2 = \frac{x}{y+1}$ $y(0)=2$

Find $y(2.6)$? $h=0.2$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Sol:

$1+y' = \sqrt{\frac{x}{y+1}}$

$f(x,y) = y' = \sqrt{\frac{x}{y+1}} - 1$

$* \quad K_1 = 0.2 \left[\sqrt{\frac{x}{y+1}} - 1\right]$

$\rightarrow K_2 = 0.2 \; f\left[x+0.2 \;,\; y+K_1\right]$

$K_2 = 0.2 \left[\sqrt{\frac{x+0.2}{y+K_1+1}} - 1\right]$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

EX: Using Runge-Kutta 2nd-Order:

$y' = t^3 - \sqrt{t+2} + y^3$ (h = 0.3)

Sol:

$$K_1 = 0.3\ f(t, y)$$

$$K_1 = 0.3\ [t^3 - \sqrt{t+2} - y^3]$$

$$K_2 = 0.3\ f(t+0.3,\ y+K_1)$$

$$= 0.3\ \left[(t+0.3)^3 - \sqrt{t+0.3+2} + (y+K_1)^3\right]$$

هاشم الخالدي
هندسة ميكانيكية

EX: Using Runge-Kutta 2nd-Order:

$$e^x y' - 3 = \sin\left(\frac{1}{y}\right) + x^2$$

$h = 0.6$

Sol:

$$y' = \frac{\sin\left(\frac{1}{y}\right) + x^2 + 3}{e^x} = f(x,y)$$

$$K_1 = 0.6\ f(x,y)$$

$$K_1 = 0.6 \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{y}\right) + x^2 + 3}{e^x}\right]$$

$$K_2 = 0.6\ f(x+0.6,\ y+K_1)$$

$$K_2 = 0.6 \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{y+K_1}\right) + (x+0.6)^2 + 3}{e^{(x+0.6)}}\right]$$

EX: Using Runge-Kutta 2nd-Order:

358

$$y' - 4x^2 = 6y^2 + \frac{1}{x}$$

use (h = 3)

~~~~~~

Sol:

$$y' = 6y^2 + \frac{1}{x} + 4x^2 = f(x,y)$$

$$* \; K_1 = 3 f(x,y)$$

$$\Rightarrow K_1 = 3\left[6y^2 + \frac{1}{x} + 4x^2\right]$$

$$* \; K_2 = 3 f(x+3, y+K_1)$$

$$K_2 = 3\left[6(y+K_1)^2 + \frac{1}{x+3} + 4(x+3)^2\right]$$
~~~~~~

EX: Using Runge-Kutta 2nd-Order:

$$\sqrt{t+1}\,y' = t^2(y-3)$$

$\rightarrow h = 0.7$

د. هاشم الخالدي

Sol:

$$\Rightarrow y' = \frac{t^2(y-3)}{\sqrt{t+1}} = f(t,y)$$

$$* \; K_1 = 0.7\, f(t,y)$$

$$= 0.7\, \frac{t^2(y-3)}{\sqrt{t+1}}$$

$$* \; K_2 = 0.7\, f(t+0.7,\; y+K_1)$$

$$\Rightarrow K_2 = 0.7\, \frac{(t+0.7)^2(y+K_1-3)}{\sqrt{t+0.7+1}}$$

Runge-Kutta 4th-Order

$$K_1 = h \cdot f(x, y)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}\ ,\ y + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}\ ,\ y + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h \cdot f\left(x + h\ ,\ y + K_3\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right]$$

د. هاشم الخالدي

EX:

Using Runge Kutta – 4th order

To find $y(0.3)$?

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 + ty + 1$$

$y(0) = 1$ (t → 0, y → 1)

$h = 0.1$

Sol:

$y' \Rightarrow f(t,y) = 2t^2 + ty + 1$

هاشم الخالدي
مدرسة ميكانيكية

$$K_1 = 0.1\left[2t^2 + ty + 1\right]$$

$$K_2 = 0.1\left[2(t+0.05)^2 + (t+0.05)(y+\frac{K_1}{2}) + 1\right]$$

$$K_3 = 0.1\left[2(t+0.05)^2 + (t+0.05)(y+\frac{K_2}{2}) + 1\right]$$

$$K_4 = 0.1\left[2(t+0.1)^2 + (t+0.1)(y+K_3) + 1\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right]$$

t	y	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	0.1	0.1058	0.1058	0.1131
0.1	1.1060	0.1131	0.1219	0.1069	0.1323
0.2	1.2232	.	.	.	.
0.3					

Final answer

Ex:

$$RC\frac{dV}{dt} = E - V$$

$V(0)=0$
$h = 0.1$

$R = 20\ \Omega$
$C = 10\ \mu F$
$E = 20\ V$

Find $V(0.2)$?

Using "Runge Kutta- 4th order" ?

Sol:

$$(20)(10)\frac{dV}{dt} = 20 - V$$

$$200\frac{dv}{dt} = 20 - V$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{200}[20 - V]$$

$$\Rightarrow f(t,v) = \frac{1}{200}[20 - V]$$

$$K_1 = \frac{0.1}{200}[20 - V]$$

$$K_2 = \frac{0.1}{200}\left[20 - \left(V + \frac{K_1}{2}\right)\right]$$

$$K_3 = \frac{0.1}{200}\left[20 - \left(V + \frac{K_2}{2}\right)\right]$$

$$K_4 = \frac{0.1}{200}[20 - (V + K_3)]$$

$$V_{i+1} = V_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

t	V	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	0.01	9.9975×10^{-3}	9.9975×10^{-3}	9.995×10^{-3}
0.1	9.9975×10^{-3}	...	...	...	...
0.2	◯	X	X	X	X

Dr. Hashem Alkhaldi

Runge-Kutta Method:

Solve $\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$

هاشم الخالدي
هندسة ميكانيكية

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right]$$

where

$$K_1 = \omega\, f[x_i, y_i]$$

$$K_2 = \omega\, f\left[\left(x_i + \tfrac{1}{2}\omega\right), \left(y_i + \tfrac{1}{2}K_1\right)\right]$$

$$K_3 = \omega\, f\left[\left(x_i + \tfrac{1}{2}\omega\right), \left(y_i + \tfrac{1}{2}K_2\right)\right]$$

$$K_4 = \omega\, f\left[\left(x_i + \omega\right), \left(y_i + K_3\right)\right]$$

Ex: $\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$ * $y(0) = 1$

* use $\omega = 0.5$

$\Rightarrow$ Solve using Runge-Kutta Method

Sol: $f(x,y) = yx^2 - y$

د. هاشم الخالدي

Dr. Hashem Alkhaldi

$i=0 \rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$

** $K_1 = 0.5\, f(0, 1) = 0.5(-1) = -0.5$

** $K_2 = 0.5\, f(0.25, 0.75) \overset{(0.5)}{=} [(0.75)(0.25)^2 - 0.75]$

$= -0.3515625$

** $K_3 = 0.5\, f(0.25, 0.8242) = 0.5\left[(0.8242)(0.25)^2 - 0.8242\right]$

د. هاشم الخالدي

$= -0.38635$

** $K_4 = 0.5\, f(0.5, 0.61365) = -0.2301178$

$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{6}[-0.5 + 2(-0.3515625) + 2(-0.38635) + -0.2301178]$

$y_1 = 0.6323420$

$i=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$

Multi-step Methods for solving ODE's

- Midpoint Method (2nd order)
- Milne's Method (4th order)
- Adams-Bashforth Method (2nd order)
- Adams-Bashforth Method (4th order)

الطرق متعددة الخطوات (The Multi-step Methods)

لقد لاحظت أن جميع الطرق السابقة هي طرق أحادية الخطوة (single-step methods) وذلك لأنه لإيجاد قيمة y_{i+1} فإنه تم استخدام قيمة y_i فقط.

في الطرق متعددة الخطوات (multi-step methods)، فلإيجاد قيمة y_{i+1} فإننا نستخدم العديد من القيم السابقة مثل: y_i, y_{i-1}, y_{i-2},... .

ومن أشهر الطرق متعددة الخطوات هي:

1 طريقة النقطة الوسطية (midpoint method) من الرتبة الثانية، وصيغتها التكرارية هي:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h.f_i$$

i= 1, 2, 3, 4, 5, ...
where:
y0 is the given initial condition.
y1 is found from Runge-Kutta.

■ 2 طريقة Milne (Milne's method) من الرتبة الرابعة، وصيغتها التكرارية

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

i= 3, 4, 5, 6, 7, ...
where:
y0 is the given initial condition.
y1, y2, y3 are found from Runge-Kutta.

■ 3 مجموعة طرق Adams-Bashforth ، وصيغها التكرارية هي:

- طريقة Adams-Bashforth من الرتبة الثانية ، وصيغتها التكرارية هي:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

i= 1, 2, 3, 4, 5, ...
where:
y0 is the given initial condition.
y1 is found from Runge-Kutta.

■ 4 طريقة Adams-Bashforth من الرتبة الرابعة ، وصيغتها التكرارية هي:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

i= 3, 4, 5, 6, 7, ...
where:
y0 is the given initial condition.
y1, y2, y3 are found from Runge-Kutta

---

* مثال: بإستخدام طريقة Adams-Bashforth من الرتبة الثانية، أوجد القيمة التقريبية لـ $y(0.5)$ ، إذا علمت أن: $y' = t + y$ وإن: $y(0) = 1$

إستخدم: $h = 0.1$

الحل: الصيغة التكرارية لهذه الطريقة هي:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

اي ان:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3(t_i + y_i) - (t_{i-1} + y_{i-1})]$$

يا سيدي الرسول

Dr. Hashem Alkhaldi

تلاحظ أن أول قيمة يمكن إيجادها هي y_2 والتي يتطلب إيجادها إيجاد قيمة y_1 . ويمكن إيجاد قيمة y_1 بإحدى الطرق أحادية الخطوة كطريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة (المثال 5) ، وفيه تم إيجاد

$y_1 = 1.1103$

ونتيجة إستخدام الصيغة التكرارية لهذه الطريقة مبينة في الجدول التالي:

i	t_i	y_i
0	0	1
1	0.1	1.1103
2	0.2	$y_2 = y_1 + h/2\,[3(t_1+y_1) - (t_0+y_0)] = 1.2419$
3	0.3	$y_3 = y_2 + h/2\,[3(t_2+y_2) - (t_1+y_1)] = 1.3977$
4	0.4	$y_4 = y_3 + h/2\,[3(t_3+y_3) - (t_2+y_2)] = 1.5802$
5	0.5	$y_5 = y_4 + h/2\,[3(t_4+y_4) - (t_3+y_3)] = 1.7924$

أنظمة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

الشكل العام لنظام المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى هو:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad y_n(a) = \alpha_n$$

System of First-Order Ordinary Differential Equations

ياسين الشول

Dr. Hashem Alkhaldi

جميع الطرق التي ذكرت سابقا، والتي استُخدمت لحل معادلة تفاضلية واحدة، يمكن إستخدامها لحل نظام المعادلات التفاضلية المذكور اعلاه.

فمثلا، بإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة فإنه يتم حساب المعاملات k_1, k_2, k_3, k_4 لكل من الدوال $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ، وبعد ذلك يتم إيجاد القيم الجديدة لهذه الدوال بتطبيق الصيغ الخاصة بهذه الطريقة.

فلإيجاد حل النظام المكون من المعادلتين:

د. هاشم الخالدي

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2)$$
$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2$$

فإنه يتم إيجاد قيم المعاملات $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$ اللازمة لحساب القيمة اللاحقة لـ y_1 ، وكذلك المعاملات $k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ اللازمة لحساب القيمة اللاحقة لـ y_2 .

حيث، أنه وللخطوة رقم i من الخطوات التكرارية:

$$k_{11} = h.f_1(t_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$k_{21} = h.f_2(t_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$k_{12} = h.f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{11}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{21}}{2})$$

$$k_{22} = h.f_2(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{11}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{21}}{2})$$

يا سيد الرسول

Dr. Hashem Alkhaldi

$$k_{13} = h.f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{12}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{22}}{2})$$

$$k_{23} = h.f_2(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{12}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{22}}{2})$$

$$k_{14} = h.f_1(t_i + h, y_{1i} + k_{13}, y_{2i} + k_{23})$$

$$k_{24} = h.f_2(t_i + h, y_{1i} + k_{13}, y_{2i} + k_{23})$$

and,

$$y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2i} + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})$$

د. هاشم الخالدي

---

* مثال : بإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة، أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dy_1}{dt} = t + y_1 - y_2 - 1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = t + y_2 - y_1 + 1$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

إستخدم :

$$h = 0.1$$

يا سيدة الشمول

Dr. Hashem Alkhaldi

الحل: الصيغة التكرارية لحل هذا النظام هي:

$$k_{11} = 0.1(t_i + y_{1i} - y_{2i} - 1)$$

$$k_{21} = 0.1(t_i + y_{2i} - y_{1i} + 1)$$

$$k_{12} = 0.1(t_i + 0.05 + y_{1i} + \frac{k_{11}}{2} - y_{2i} - \frac{k_{21}}{2} - 1)$$

$$k_{22} = 0.1(t_i + 0.05 + y_{2i} + \frac{k_{21}}{2} - y_{1i} - \frac{k_{11}}{2} + 1)$$

$$k_{13} = 0.1(t_i + 0.05 + y_{1i} + \frac{k_{12}}{2} - y_{2i} - \frac{k_{22}}{2} - 1)$$

$$k_{23} = 0.1(t_i + 0.05 + y_{2i} + \frac{k_{22}}{2} - y_{1i} - \frac{k_{12}}{2} + 1)$$

$$k_{14} = 0.1(t_i + 0.1 + y_{1i} + k_{13} - y_{2i} - k_{23} - 1)$$

$$k_{24} = 0.1(t_i + 0.1 + y_{2i} + k_{23} - y_{1i} - k_{13} + 1)$$

and,

$$y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2i} + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})$$

يا حسين الشول

Dr. Hashem Alkhaldi

ونتيجة إستخدام هذه الصيغة التكرارية ثلاث خطوات متتابعة مبينة في

الجدول التالي:

i	t_i	y_{1i}	y_{2i}	k_{11}	k_{21}	k_{12}	k_{22}	k_{13}	k_{23}	k_{14}	k_{24}
0	0	0	1	-0.2	0.2	-0.215	0.225	-0.217	0.227	-0.2344	0.2544
1	0.1	-0.2164	1.2264	-0.2343	0.2543	-0.2537	0.2837	-0.2562	0.2862	-0.2785	0.3185
2	0.2	-0.4718	1.5118	-0.2784	0.3184	-0.3032	0.3532	-0.3062	0.3562	-0.3346	0.3946
3	0.3	-0.7771	1.8671	-0.3344	0.3944	-0.3659	0.4359	-0.3695	0.4395	-0.4053	0.4853

حل المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة العليا

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية من الدرجة n هي:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})$$

والقيم المبدئية هي:

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \alpha_1, \quad y''(a) = \alpha_2, \quad y'''(a) = \alpha_3, \quad y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$$

ويمكن حل هذه المعادلة التفاضلية بعد تحويلها الى نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى ، الذي تم شرح طريقة حله سابقاً.

ولتحويل المعادلة التفاضلية أعلاه الى نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى، نفرض أن:

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

ياسين الشيول

Numerical Solution for High-Order Ordinary Differential Equations

Dr. Hashem Alkhaldi

وبإشتقاق معادلات هذا النظام نجد:

$$y_1' = y'$$
$$y_2' = y''$$
$$y_3' = y'''$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$y_n' = y^{(n)}$$

د. هاشم الخالدي

أي أن:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = y_4$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$y_n' = f(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

أي أنه تم تحويل المعادلة التفاضلية من الدرجة العليا الى نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.

---

* مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية التالية:

$$y'' - y' - 2y + t = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$$

الحل: أكتب المعادلة التفاضلية أعلاه بالشكل:

$$y'' = y' + 2y - t$$

يا سيد الرسول

Dr. Hashem Alkhaldi

أكتب هذه المعادلة بشكل نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى، فيفرض أن:

د. هاشم الخالدي

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$

نستنتج أن:

$$y_1' = y' = y_2$$
$$y_2' = y'' = y' + 2y - t = y_2 + 2y_1 - t$$

أي أن نظام المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والذي يمثل المعادلة أعلاه هو:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_2 + 2y_1 - t$$

والقيم المبدئية، هي:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

ويمكن حل هذا النظام بإستخدام أي من الطرق التي شرحت سابقاً. فبإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الثانية، فإن الصيغة التكرارية لحل هذا النظام هي:

$$k_{11} = h.f_1(t_i, y_{1i}, y_{2i}) = 0.1y_{2i}$$
$$k_{21} = h.f_2(t_i, y_{1i}, y_{2i}) = 0.1(y_{2i} + 2y_{1i} - t_i)$$

$$k_{12} = h.f_1(t_i + h, y_{1i} + k_{11}, y_{2i} + k_{21}) = 0.1(y_{2i} + k_{21})$$
$$k_{22} = h.f_2(t_i + h, y_{1i} + k_{11}, y_{2i} + k_{21}) = 0.1(y_{2i} + k_{21} + 2y_{1i} + 2k_{11} - t_i - 0.1)$$

سهيل البتول

Dr. Hashem Alkhaldi

and,

$$y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{2}(k_{11} + k_{12})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2i} + \frac{1}{2}(k_{21} + k_{22})$$

ونتيجة إستخدام هذه الصيغة التكرارية ثلاث خطوات متتابعة مبينة في الجدول التالي:

i	t_i	y_{1i}	y_{2i}	k_{11}	k_{21}	k_{12}	k_{22}
0	0	0	1	0.1	0.1	0.11	0.12
1	0.1	0.105	1.11	0.111	0.122	0.1232	0.1464
2	0.2	0.2221	1.2442	0.1244	0.1488	0.1393	0.1786
3	0.3	0.354	1.4097	0.1408	0.1816	0.159	0.2179

هاشم الخالدي
هندسة ميكانيكية

ياسين الشول

Dr. Hashem Alkhaldi

Solved Examples:

* مثال : للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''-y'+2y=e^t.\cos(t)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

د. هاشم الخالدي

أوجد $y(0.2)$

الحل: أكتب المعادلة التفاضلية أعلاه بالشكل:

$$y''=y'-2y+e^t.\cos(t)$$

أكتب هذه المعادلة بشكل نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.

بفرض أن:

$$y_1=y$$
$$y_2=y'$$

نستنتج:

$$y_1'=y'=y_2$$
$$y_2'=y''=y'-2y+e^t.\cos(t)=y_2-2y_1+e^t.\cos(t)$$

أي أن نظام المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والذي يمثل المعادلة أعلاه هو:

$$y_1'=y_2$$
$$y_2'=y_2-2y_1+e^t.\cos(t)$$

والقيم المبدئية، هي:

$$y_1(0)=0,\quad y_2(0)=1$$

ياسين الشول

Dr. Hashem Alkhaldi

ويمكن حل هذا النظام بإستخدام أي من الطرق السابقة. فبإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الثانية، وبقيمة $h = 0.1$، فإن الصيغة التكرارية لحل هذا النظام هي:

$$k_{11} = h.f_1(t_i, y_{1i}, y_{2i}) = 0.1(y_{2i})$$
$$k_{21} = h.f_2(t_i, y_{1i}, y_{2i}) = 0.1(y_{2i} - 2y_{1i} + e^{t_i}.\cos(t_i)$$
$$k_{12} = h.f_1(t_i + h, y_{1i} + k_{11}, y_{2i} + k_{21}) = 0.1(y_{2i} + k_{21})$$
$$k_{22} = h.f_2(t_i + h, y_{1i} + k_{11}, y_{2i} + k_{21}) = 0.1\left(y_{2i} + k_{21} - 2y_{1i} - 2k_{11} + e^{(t_i+h)}.\cos(t_i + h)\right)$$

and,

$$y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{2}(k_{11} + k_{12})$$
$$y_{2,i+1} = y_{2i} + \frac{1}{2}(k_{21} + k_{22})$$

وبإستخدام هذه الصيغة، نجد:

الخطوة الأولى:

$$k_{11} = 0.1(y_{2,0}) = 0.1(1) = 0.1$$
$$k_{21} = 0.1\left(y_{2,0} - 2y_{1,0} + e^{t_0}.\cos(t_0)\right) = 0.1\left(1 - 2(0) + e^{0}.\cos(0)\right) = 0.2$$

$$k_{12} = 0.1(y_{2,0} + k_{21}) = 0.1(1 + 0.2) = 0.12$$
$$k_{22} = 0.1\left(y_{2,0} + k_{21} - 2y_{1,0} - 2k_{11} + e^{(t_0+h)}.\cos(t_0 + h)\right)$$
$$= 0.1\left(1 + 0.2 - 2(0) - 2(0.1) + e^{(0+0.1)}.\cos(0 + 0.1)\right) = 0.23$$

هاشم الخالدي
مهندس ميكانيكي

ياسين الشول

Dr. Hashem Alkhaldi

and,

$$y_{1,1} = 0 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.12) = 0.11$$
$$y_{2,1} = 1 + \frac{1}{2}(0.2 + 0.23) = 1.215$$

الخطوة الثانية:

$$k_{11} = 0.1(y_{2,1}) = 0.1(1.2) = 0.12$$
$$k_{21} = 0.1\left(y_{2,1} - 2y_{1,ii} + e^{t_1}.\cos(t_1)\right) = 0.1\left(1.2 - 2(0.11) + e^{0.1}.\cos(0.1)\right) = 0.208$$

$$k_{12} = 0.1(y_{2,1} + k_{21}) = 0.1(1.2 + 0.2) = 0.14$$
$$k_{22} = 0.1\left(y_{2,1} + k_{21} - 2y_{1,1} - 2k_{11} + e^{(t_1+h)}.\cos(t_1 + h)\right)$$
$$= 0.1\left(1.215 + 0.208 - 2(0.11) - 2(0.12) + e^{(0.1+0.1)}.\cos(0.1 + 0.1)\right) = 0.216$$

and,

$$y_{1,1} = 0.11 + \frac{1}{2}(0.12 + 0.14) = 0.24$$
$$y_{2,1} = 1.215 + \frac{1}{2}(0.208 + 0.216) = 1.427$$

مثال : إذا علمت أن المعادلة التي تصف التيار i في دائرة كهربائية مكونة من مقاومة وملف على التسلسل هي $R.i + L.\frac{di}{dt} = v(t)$، حيث R هي قيمة المقاومة و L هي حثية الملف و v هي فولطية التغذية للدائرة.
إذا علمت أن $R = 10\Omega$ ، $L = 1H$ ، $i(0) = 0A$ وان $v(t) = 12.e^{-t}\sin(t)$ ،
أوجد قيمة $i(0.2)$ ، بإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة، . إستخدم $h = 0.1s$.

حسين لشلول

Dr. Hashem Alkhaldi

الحل:

من المعادلة $R.i+L.\frac{di}{dt}=v(t)$ ، نجد:

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}.i+\frac{1}{L}.v(t)$$

أي:

$$\frac{di}{dt}=f(t,i)=-10.i+12.e^{-t}.\sin(t)$$

الصيغة التكرارية لطريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة هي:

$$k_1=h.f(t,i)=-i+1.2e^{-t}.\sin(t)$$

$$k_2=h.f(t+\frac{h}{2},i+\frac{k_1}{2})=-(i+\frac{k_1}{2})+1.2e^{-(t+0.05)}.\sin(t+0.05)$$

$$k_3=h.f(t+\frac{h}{2},i+\frac{k_2}{2})=-(i+\frac{k_2}{2})+1.2e^{-(t+0.05)}.\sin(t+0.05)$$

$$k_4=h.f(t+h,i+k_3)=-(i+k_3)+1.2e^{-(t+0.1)}.\sin(t+0.1)$$

$$i_{n+1}=i_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

هاشم الخالدي
مهندس ميكانيكي

ونتيجة إستخدام هذه الصيغة التكرارية مبينة في الجدول التالي:

n	t_n	i	k_1	k_2	k_3	K_4
0	0	0	0	0.057	0.0285	0.07990
1	0.1	0.0418	0.0666	0.0792	0.0729	0.0805
2	0.2	0.117				

أي أن:

$$i(0.2)=0.117A$$

ياسين لبول

1) بإستخدام طريقة Euler ، أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'+y+3t=5$

$y(0)=1$

في الفترة: $0\le t\le 1$ / إستخدم $h=0.2,\ 0.1$

2) أعد حل السؤال الأول بإستخدام طريقتي Taylor من الرتبتين الثانية والرابعة

3) أعد حل السؤال الأول بإستخدام طريقتي Runge-Kutta من الرتبتين الثانية والرابعة.

4) أعد حل السؤال الأول بإستخدام طريقة Adams-Bashforth .

5) أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y''+y'+y=\sin(t),\quad y(0)=y'(0)=0$

$0\le t\le 1$

إستخدم $h=0.2,\ 0.1$

6) أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y''+y'-y-2y=e^t,\quad y(0)=1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2$

$0\le t\le 1$

إستخدم $h=0.2,\ 0.1$

7) إذا علمت أن المعادلة التي تصف التيار i في دائرة كهربائية مكونة من مقاومة وملف على التسلسل هي $R.i+L.\frac{di}{dt}=v(t)$ ، حيث R هي قيمة المقاومة و L هي حثية الملف و v هي فولطية التغذية للدائرة. إذا علمت أن $R=20\Omega$ ، $L=500mH$ ، $i(0)=0A$ وأن $v(t)=10\sin(t)$ ، أوجد قيمة $i(0.5)$، بإستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة، . إستخدم $h=0.1s$.

ياسين الشول